A CONDUÇÃO DO CALOR E AS SÉRIES DE FOURIER

Antônio de Pádua Farias de Souza Filho (bolsista do PIBIC/UFPI), Alexandro Marinho Oliveira (Orientador, UFPI)

INTRODUÇÃO

Vivemos em um mundo físico que apresenta diversos fenômenos. Fenômenos esses, que podem, em sua maioria, ser descritos por meio de equações que envolvem derivadas, a saber, as equações diferenciais. O fenômeno da Condução do Calor é um exemplo desses. Assim que encontramos a equação diferencial que o descreve, temos que resolvê-la, e para isso, precisamos conhecer a teoria das Séries de Fourier. Aqui, iniciamos estudando um pouco sobre equações diferenciais e, posteriormente entramos no assunto específico do projeto.

METODOLOGIA

Para a execução deste trabalho, foram realizadas leituras de obras relacionadas ao assunto, apresentação de seminários, que foram assistidos pelo orientador e pelos membros do grupo de pesquisa.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste trabalho deduzimos a equação do calor $u_t = \alpha^2 u_{xx}$ que descreve a condução do calor em uma barra. Para encontrarmos a solução dessa equação deve-se considerar informações adicionais sobre o problema específico em estudo. Consideramos um problema de equação do calor em uma barra de secção reta uniforme, feita com material homogêneo, de modo que a distribuição de temperatura dependa de u(x,0)=f(x). Aqui, supomos, ainda, que os lados da barra estão perfeitamente isolados, de modo que não haja transmissão de calor aí. Para o problema mais geral reduzimos a esse caso especial. Portanto, o problema de condução do calor é encontrar u(x,t) tal que

i. $u_t = \alpha^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L.\ t >, 0$

ii. $u(0,t) = u(L,t) = 0,\ t > 0$

iii. $u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq L,\ \text{onde } f : [0,L] \to \mathbb{R}$

onde α^2 é a difusibilidade térmica do material.

O problema acima é chamado de Problema de Valores inicial e de Fronteira-PVIF.

Aplicamos o Método de Fourier no PVIF e suspeitamos que a solução é uma série trigonométrica da forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin(\frac{n\pi x}{L}).$$

Para a condição inicial, temos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Para descobrirmos em que condições f(x) pode ser escrito como uma série trigonométrica estudamos as Séries de Fourier, onde chegamos ao seguinte resultado:

- Dada uma função f :R→R periódica de período 2L, integrável e absolutamente integrável e absolutamente integrável, podemos calcular seus coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) cos\ \frac{n\pi x}{L}\ dx,\ \ n \geq 0;$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\ \frac{n\pi x}{L}\ dx,\ \ n \geq 1$$

e assim podemos escrever

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\ \frac{n\pi x}{L} + b_n sen\ \frac{n\pi x}{L}\right)$$

Agora apresentamos sem provar um resultado referente à convergência da série de Fourier da f

TEOREMA DE FOURIER. Seja f .:R→R uma função seccionalmente diferenciável e de período 2L. Então, a série de Fourier da função f converge, em cada ponto x, para $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$

isto é,

$$\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\ \frac{n\pi x}{L} + b_n sen\ \frac{n\pi x}{L}\right)$$

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser vista na referência [1], ou em livros de cálculo avançado.

Após o estudo feito das séries de Fourier, mostramos duas definições e dois teoremas que garantem encontrarmos a solução do PVIF.

DEFINIÇÃO (I) DE SOLUÇÃO DO PVIF. Uma função $u : \bar{\mathfrak{R}} \rightarrow \mathfrak{R}$, onde $\mathfrak{R}$={(x,t) $\in \mathbb{R}^2$: 0<x<L, t>0} e, $\bar{\mathfrak{R}} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L,\quad t \geq 0\}$uma solução do PVIF se ela for contínua em , $\bar{\mathfrak{R}}$

tiver derivadas parciais u_t e u_{xx} em $\mathfrak{R}$ e satisfazer às relações

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \quad\quad 0 < x < L.\ t > 0\ ,$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0,\ \ t > 0$$

$$u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq L,\ \text{onde}\ f : [0,L] \rightarrow \mathbb{R}$$

onde a constante α^2 e a função f são dadas.

Quando a temperatura inicial $f(x)$ for uma função descontínua, damos a definição abaixo, onde usa-se a seguinte notação

$\hat{\mathfrak{R}} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq L, \quad t > 0\}$.

DEFINIÇÃO (II) DE SOLUÇÃO DO PVIF. Uma função contínua $u : \overline{\mathfrak{R}} \to \mathbb{R}$ é uma solução do PVIF, se

$$u_t = K u_{xx}, \quad 0 < x < L, \ \ t > 0,$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$\lim_{t \to 0} \int_0^L u(x,t)\varphi(x)\, dx = \int_0^L f(x)\varphi(x)\, dx,$$

para toda φ seccionalmente contínua em [0, L].

TEOREMA . Se f for de quadrado integrável em [0, L], então a expressão $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L} sen \frac{n\pi x}{L}$ define uma função em $\mathfrak{R}$ que é solução do PVIF no sentido (II).

TEOREMA. Seja $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(0) = f(L) = 0$ e tal que a derivada f' exista em [0, L] e seja de quadrado integrável. Então a expressão $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2 Kt/L} sen \frac{n\pi x}{L}$ define uma função contínua em $\overline{\mathfrak{R}}$, que é solução do PVIF no sentido (I).

Obs: A demonstração dos dois teoremas acima pode ser apreciada na referência bibliográfica [1].

CONCLUSÃO

O problema da condução do calor em uma barra é útil para despertar o interesse, naquele que o estuda, pelos problemas relacionados ao mundo físico e, também, mostrar a relevância de algumas teorias matemáticas, como as Séries de Fourier, na resolução desses problemas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Figueiredo, D. G. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, 4° ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[2] Boyce, W. E. DiPrima, R.C.; tradução: Iorio, V.M. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno, 8° Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

[3] Figueiredo, D.G. Análise I, 2° ed. Rio de Janeiro: LTC, 1973.

[4] Santos, R.J. Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. Belo Horizonte: Impressora Universitária da UFMG, 2011.

[5] Dennis, G.Z. Equações Diferenciais com aplicações em modelagem, 3° ed. São Paulo: Thomsom, 2003.

Palavras-Chave: Método de Fourier. Convergência. Continuidade.